

LA EJERCITACIÓN EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN FUNCIÓN DE LA HABILIDAD CALCULAR.

Oscar Silvio Rodríguez Moya

profesor de Matemáticas de la Universidad "Máximo Gómez Báez"
Licenciado en Educación, especialidad Matemática (1988) y Máster en Ciencias de la Educación Superior (2000).

oscarm@informatica.unica.cu

Mirtha Numa Rodríguez

profesora de Matemáticas de la Universidad "Máximo Gómez Báez"
Licenciada en Educación, especialidad Matemática (1979) y Doctora en Ciencias de la Educación Superior (2011).

mirtha@informatica.unica.cu

RESUMEN:

Una de las disciplinas básicas en el plan de estudios de las carreras de Ciencias Técnicas es la Matemática, siendo el tema correspondiente al Cálculo Diferencial uno de los primeros que se imparte y que debe contribuir a que el alumno aplique los conocimientos y desarrolle habilidades de modo creador a problemas técnicos y procesos tecnológicos de su especialidad.

En el presente trabajo se muestra una estrategia metodológica que contribuya al desarrollo de la habilidad **calcular derivadas de funciones reales de una variable real** en las clases de **ejercitación**, en el que se realizó un estudio teórico acerca del desarrollo de habilidades que permitió definirla, determinar las invariantes funcionales, los indicadores para evaluar la ejecución de la actividad y a partir de ahí, crear una escala valorativa compuesta por cuatro niveles de profundidad que permita evaluar el desarrollo de la habilidad. Se realizó además un estudio teórico acerca de las clases de ejercitación y el trabajo independiente que permitió definir cuatro tipos de clases prácticas; asimismo se muestran ejemplos concretos de ejercicios que pueden proponerse por parte de los docentes en cada uno de estos tipos.

Abstract: One of the basic disciplines in the plan of studies of the careers of Technical Sciences is the Mathematical one, being the topic corresponding to the Differential Calculation one of the first ones that is imparted and that it should contribute to that the student applies the knowledge and develop abilities in a creative way to technical problems and technological processes of his specialty.

Presently work is shown a methodological strategy that contributes to the development of the ability to calculate derived of real functions of a real variable in the exercitation classes, in which was carried out a theoretical study about the development of abilities that allowed to define it, to determine the functional invariants, the indicators to evaluate the execution of the activity and starting from there, to create a scale valorativa composed by four levels of depth that it allows to evaluate the development of the ability. He/she was also carried out a theoretical study about the exercitation classes and the independent work that it allowed to define four types of practical classes; also concrete examples of exercises are shown that can intend on the part of the educational ones in each one of these types.

Palabras clave: calcular derivadas-invariante funcional-habilidad calcular-escala valorativa-funciones compuestas- trabajo independiente.

Key Words: functional - ability calculate- estimate scale - invariant functional - derived calculate - composed functions-work independent.

INTRODUCCIÓN:

Las universidades cubanas tienen ante sí, en los momentos actuales, una tarea de vital importancia y de gran responsabilidad en la formación de los profesionales para la economía nacional, dotados de una alta maestría, una vasta erudición y profundas convicciones y valores.

La formación de un profesional de perfil amplio exige que el egresado domine las bases de los conocimientos científicos y desarrolle habilidades para enfrentar su futura vida laboral. Para el logro de este cometido la formación matemática en el estudiante juega un rol medular, pues, entre otras cosas, "(...) la matemática representa el instrumento gnoseológico y metodológico más general y eficiente en la investigación de los fenómenos de cualquier ciencia, incluyendo las ciencias sociales. El pensamiento matemático, pensamiento modelador, creador, heurístico, se extiende cada vez más, volviéndose el pensamiento característico del hombre de ciencia en general" (Hernández, 2008:17)

Sin embargo, los orígenes de las abstracciones de esta ciencia, en la mayoría de los casos quedan ocultos para los estudiantes, y aunque no siempre es posible satisfacer estos requerimientos en la clase, es conveniente, siempre que sea factible, hacer ver que la Matemática refleja cualidades del mundo exterior de manera muy específica, de forma tal que las huellas que esta deje como resultado de su aprendizaje se manifiesten como síntesis en la actividad humana.

Para las carreras en las que la Matemática es una herramienta imprescindible de trabajo, el egresado debe adquirir una cultura que implique la comprensión de esta ciencia desde el punto de vista de su desarrollo e historicidad, su método, la relación de esta con la Computación y la habilidad de aplicar los conocimientos de modo creador a problemas técnicos y procesos tecnológicos de su especialidad, por lo que se demanda de la preparación de futuros egresados con altos conocimientos teóricos, hábitos y habilidades profesionales e investigativas. Esto implica en gran medida una correcta formación matemática, de ahí que el perfeccionamiento de su enseñanza cobra singular importancia, para ello debe ser reestructurada de forma tal que se convierta en el medio a través del cual se formen representaciones para darle solución a sus tareas científicas, sociales y productivas, siendo un profesional capacitado en correspondencia con las exigencias actuales del tiempo presente y futuro.

La Matemática Aplicada es una disciplina fundamental dentro del ciclo básico, en la que se debe trabajar en función de que los estudiantes dominen, entre otros, los métodos principales del Cálculo Diferencial, del Cálculo Integral y de la Geometría Analítica. Su estudio constituye la base del pensamiento lógico y algorítmico, al aplicarlos se crea el hábito de ampliar por sí mismos sus conocimientos para que puedan llevar a cabo el análisis matemático de las tareas prácticas propias de su especialidad.

Sin embargo, con independencia de las intenciones que han estado presentes al momento de llevarse a cabo el perfeccionamiento de los programas de Matemática en los diferentes planes de estudio, aún subsisten una serie de dificultades en el proceso de enseñanza de esta ciencia, por lo que su aprendizaje en la mayoría de los casos es memorístico, reproductivo, lo que no permite alcanzar niveles productivos y creativos de la asimilación deseados.

Desde el punto de vista de los autores, aún existen dificultades en el currículum, entre las que se tienen:

- La aplicación de los programas directores y la integración de los componentes académico, laboral e investigativo aún no son los deseados.
- El trabajo que se realiza en la aplicación de los programas de estudio no garantiza un adecuado trabajo interdisciplinario de calidad en función del desarrollo de habilidades.
- El nivel de conocimientos y de **desarrollo de habilidades básicas** al culminar una asignatura o una disciplina no es el adecuado.

En los programas de las asignaturas correspondientes a la disciplina Matemática existe un grupo de habilidades a desarrollar en los estudiantes, entre las que se destaca **calcular**, siendo la clase de **ejercitación** marco propicio para contribuir a su formación y desarrollo.

DESARROLLO:

1. LA HABILIDAD CALCULAR Y UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA SU DESARROLLO.

La formación y desarrollo de habilidades en el hombre a un máximo de posibilidades constituye un problema objeto de central atención en la actualidad, como consecuencia del acelerado desarrollo de la ciencia y la técnica, y en especial, un gran reto a los trabajadores de la Educación, por su responsabilidad en la formación de las nuevas generaciones. El concepto ha tenido diversas interpretaciones y tratamientos por la Psicología y la Didáctica. Desde la primera, se refiere de un modo primordial a las disposiciones favorables a la acción. En su determinación entran factores fisiológicos, sociales y hereditarios (Enciclopedia Universal Ilustrada, 1925:234) y desde la Didáctica es un componente del contenido que tiene que ver con el modo de actuar.

Muchos autores la han tratado exponiendo sus criterios, reflexiones, puntos de vista, etc. Entre ellos, Carlos M. Álvarez de Zayas plantea “La habilidad como acción que se puede descomponer en operación. Mientras que la habilidad se vincula con la intención, la operación lo hace con las condiciones, de modo tal que en cada habilidad se pueden determinar los eslabones de la misma u operaciones cuya integración permite el dominio por el hombre de un modo de actuación” (Álvarez, 1989: 77). Héctor Brito la define como: “aquella formación psicológica ejecutora particular constituida por el sistema de operaciones dominadas que garantiza la ejecución del sujeto bajo control consciente” (Brito, 1999: 124).

A modo de resumen pueden llegarse a las siguientes generalizaciones:

- Es un concepto psico-pedagógico amplio y complejo.
- Sólo se forma y desarrolla en el proceso de realización de la actividad.
- Contiene un sistema de operaciones que deben ser dominadas por el sujeto.
- Encierra un modo de actuación que tiene carácter general, dependiendo del nivel de sistematicidad de que se trate.

La definición de H. Brito señala con claridad la secuencia lógica de la formación de la habilidad, en tanto de la actividad mental se pasa a la práctica por una vía totalmente individual, donde se desarrollan un sistema de operaciones con

plena conciencia del individuo. Estos criterios son compatibles con el tratamiento que se le da a este concepto en la enseñanza de las matemáticas, razón por la cual la posición adoptada en el presente trabajo se corresponde con sus criterios generales.

La habilidad **calcular** pertenece al sistema de habilidades específicas para la Matemática formulado por Hernández H. (Hernández, 2006:24-26). Desde el punto de vista matemático existen diferentes definiciones, así por ejemplo, "...calcular es la transformación de un conjunto de números reales, relacionados por operaciones, en un número, mediante la aplicación de algoritmos supuestamente conocidos" (Espinosa, 2007:28).

La definición anterior pudiera aceptarse si no se restringiera el cálculo sólo a operaciones con números reales, pues es conocido que este puede ampliarse. Así se entenderá por calcular: "**una forma existencial de un algoritmo que puede llevarse a cabo de forma manual-mental, oral, escrita y mediante tablas o medios de cómputo.** Esta presupone siempre de forma explícita o implícita la habilidad de algoritmizar; es decir, plantear una sucesión estricta de operaciones matemáticas que describan un procedimiento que conduce a la solución de un determinado ejercicio o problema.

Después de definir la habilidad calcular, el docente debe establecer criterios que permitan comprobar el desarrollo de la habilidad. Este se reconoce cuando en la ejecución de la acción se ha logrado un grado de sistematización que conduce al nivel de dominio del sistema de operaciones esenciales, necesarias y suficientes denominado **invariantes funcionales de la acción.**

Tomando como base la literatura revisada, en particular el análisis teórico desarrollado por M. Rodríguez y R. Bermúdez en su libro "La Personalidad del Adolescente" (Rodríguez, 1996:38-54) y la experiencia de los autores, se proponen como **invariantes funcionales de la habilidad "calcular"** las siguientes:

- **Identificar** la vía de solución del ejercicio teniendo en cuenta la estructura algebraica de la función.
- **Seleccionar** las reglas de cálculo necesarias.
- **Aplicar** las reglas de cálculo.

El tema Cálculo Diferencial tiene como núcleo el concepto de derivada y sus aplicaciones en diferentes ciencias, por lo que su cálculo es de medular atención desde se trata

De acuerdo a lo anterior, se proponen como invariantes funcionales para la habilidad "calcular la derivada de una función real de variable real":

- **Identificar** el tipo de función que va a derivar: escalar o vectorial, de una o varias variables, explícita o implícita, simple o compuesta.
- **Seleccionar la regla adecuada** para calcular la derivada: derivas inmediatas, reglas de derivación.
- **Calcular la derivada** utilizando la regla seleccionada y realizar las operaciones algebraicas hasta simplificar lo más posible el resultado.

Posteriormente, para evaluar los aspectos ejecutores de la acción con vistas a diagnosticar la presencia de la habilidad se puede concretar en una técnica de **escala valorativa**, esta debe ser lo más objetiva posible y para su confección

se debe modelar de forma concreta el fenómeno objeto de estudio (en este caso la habilidad), formular con exactitud los **objetivos** que se persiguen y determinar los **indicadores** de la existencia del fenómeno a través de manifestaciones externas del estudiante durante la realización de la acción a través de las invariantes funcionales de la habilidad.

A continuación se proponen los indicadores y la escala atendiendo a ellos que permiten comprobar el desarrollo de la habilidad “calcular derivadas de funciones reales de una variable real”:

INDICADORES PARA EVALUAR LA EJECUCIÓN DE LA HABILIDAD “CALCULAR DERIVADAS”:

1. Seleccionar la(s) regla(s) según la estructura algebraica de la función.
2. Aplicar la(s) regla(s).
3. Operar.

ESCALA POR NIVELES ATENDIENDO A LOS INDICADORES:

INDICADOR:	NIVELES DE PROFUNDIDAD			
	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	CUARTO
1	La función es simple y presenta una operación algebraica.	La función es simple y presenta más de una operación algebraica.	Aparecen funciones simples y compuestas con una operación algebraica.	Aparecen funciones simples y compuestas con más de una operación algebraica.
2	Comete hasta dos errores.	Comete un error.	Comete un error.	No comete errores.
3	Comete hasta dos errores.	Comete un error.	No comete errores.	No comete errores.

2. LA CLASE DE EJERCITACIÓN EN FUNCIÓN DEL DESARROLLO DE LA HABILIDAD CALCULAR:

Según (Labarrere, 1991:125), dentro de los llamados **métodos prácticos** se encuentra el de **ejercitación** el cual tiene una vital importancia como método básico para la formación y desarrollo de habilidades.

La **clase práctica** como forma de enseñanza propia para la ejercitación tiene diferentes aspectos de central atención por parte de los docentes; entre estos se tienen:

- Partir de los planteamientos teóricos para lograr su vinculación con la ejecución práctica.
- Elaborar un plan o algoritmo de acciones.
- Deben aprovecharse las potencialidades del sistema de conocimientos en función del desarrollo de habilidades.
- Tenerse en cuenta los diferentes niveles de asimilación por el que debe transitar el alumno para la ejecución de la acción (concebirlo como un sistema).

- Los ejercicios deben ser generalizadores para poder enfrentarse a problemas variados de la realidad profesional.
- Debe contribuir a la motivación en los estudiantes.
- Debe existir una derivación lógica que permita vincular al estudiante con problemáticas específicas de su campo de acción y esferas de actuación.
- Auto-valorar la actividad ejecutada (procedimientos de control y evaluación). Deben llevarse a cabo desde una perspectiva que haga consciente al estudiante de los procesos que tienen lugar en la ejecución de la acción.

El núcleo de la clase de ejercitación en las Matemáticas es sin dudas el **ejercicio**, que puede entenderse como una exigencia para la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones y el cálculo; es decir, es una exigencia para actuar que debe estar caracterizada por:

- **El objetivo de las acciones** que significa transformar una situación inicial (dados ciertos elementos o premisas) en una situación final (elementos que se buscan, tesis, etc.)
- **El contenido de las acciones** que está caracterizado por:
 - a) El objeto de las acciones, dado por elementos de la materia de enseñanza (conceptos, proposiciones y procedimientos algorítmicos); la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y elementos de materia matemáticas y los procedimientos heurísticos (principios, estrategias y reglas), así como medios heurísticos auxiliares.
 - b) Tipos de acciones, por ejemplo: identificar, realizar, comparar, ordenar, clasificar, reconocer, etc., que son condiciones necesarias para las acciones a tener en cuenta según las exigencias que el ejercicio plantea, expresada por su grado de dificultad.
- **Las condiciones para las acciones**, que están dadas, en primer lugar, por las exigencias que el ejercicio plantea al alumno, expresadas por el grado de dificultad que toma como base el objetivo y el contenido de las acciones.

La selección del ejercicio es una actividad pedagógica productiva y dirigida hacia un objetivo en la cual hay que apoyarse en diversos factores subjetivos y condiciones de la clase. Según (Ballester, 1992:109), una adecuada selección de estos debe hacerse bajo los siguientes puntos de orientación:

- La contribución que se puede lograr con los ejercicios formales para la fijación de conceptos, teoremas y procedimientos.
- Las funciones didácticas que se pueden y deben realizar con ayuda de los ejercicios.
- La materialización del principio del politecnismo.
- La relación intermaterias.
- Las posibilidades que ofrecen para una influencia educativa.
- La construcción de ejercicios por parte de los estudiantes.

Para lograr una adecuada ejercitación se proponen los siguientes tipos de clases prácticas:

- **La clase práctica del tipo I:** es el tipo de clase donde los estudiantes particularizan los conceptos generales a partir de la generalización teórica, se apropian de métodos de solución a través de la adquisición de conocimientos complementarios y desarrollan habilidades en la aplicación de estos conocimientos a un nivel reproductivo.
- **La clase práctica del tipo II:** es el tipo de clase donde los estudiantes sistematizan las habilidades adquiridas a un primer nivel, amplían, profundizan e integran los conocimientos, lográndose niveles de producción y/o creación en los alumnos.
- **La clase práctica del tipo III:** son clases prácticas de tipo II, que se desarrollan al finalizar un tema o parte de él, con el objetivo de integrar los conocimientos y habilidades adquiridas.
- **La clase práctica del tipo IV:** es el tipo de clase donde los alumnos exponen los resultados de una tarea investigativa orientada con anterioridad, relacionada con la modelación de problemas vinculados con otras asignaturas o con el perfil de su profesión y que requiere del uso de métodos matemáticos para su solución.

A continuación se muestran algunos ejemplos que contribuyan al desarrollo de la habilidad calcular, específicamente para calcular derivadas de funciones reales de una variable real, en los diferentes tipos de clases prácticas propuestos:

Clase práctica del tipo I:

(Ejercicios donde se reproduce el concepto derivada aplicando la definición, en dos formas: geométrica y algebraica).

1. Haga un esbozo del gráfico de la función $f(x) = \ln x$, marque tramos que representen $f(2)$, $f(2+h)$, $f(2+h) - f(2)$ y h (tome $h > 0$). ¿Cuál recta tiene la pendiente $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$?

2. Si $f(x) = x^2 + 4x$, determine $f'(x)$ utilizando la definición.

(Ejercicios donde se calculan derivadas de primer y segundo orden reproduciendo las reglas de derivación para funciones simples y funciones compuestas).

3. Calcula la derivada indicada en cada caso:

a) $f(x) = 3^x - \arcsen x$; $f'(x)$

b) $f(x) = \log_3 x \csc^3 x$; $\frac{df}{dx}$

b) $v(t) = \frac{t^3 - 6}{\sqrt[3]{\sen(4 + \sqrt{t})}}$; $\frac{d^2v}{dt^2}$

c) $g(x) = \sqrt{x} \cos^3 x - \ln\left(\frac{5}{x^2 - 1}\right)$; $\frac{dg}{dt}(3)$

Clase práctica del tipo II:

(Ejercicios donde debe aplicarse el concepto derivada en diferentes campos).

1. Trace la gráfica de la función g para la cual $g(0)=0, g'(0)=3, g'(1)=0$ y $g'(2)=1$. (Aplicación geométrica donde deben graficar).
2. Determine la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x)=x^3-5x+1$ en el punto $(1,-3)$ y haga la representación gráfica. (Aplicación algebraica y geométrica).
3. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con la ecuación del movimiento $s=f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Calcule la velocidad cuando $t=2$ si $f(t)=t^2-5t+6$. (Aplicación en la Física).
4. El costo de producir x bolsas de cemento es de $C=f(x)$ dólares.
 - a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$?
 - b) ¿Qué significa $f'(800)=17$?
 - c) ¿Los valores de $f'(x)$ aumentarán o disminuirán a corto plazo? ¿qué puede decirse acerca del largo plazo? Explique. (Aplicación económica)

Clase práctica del tipo III:

1. Un recipiente en forma de cono invertido tiene una altura de 16cm y un radio de 5cm en la parte superior. Está parcialmente lleno con un líquido que exuda a través de los lados con una razón proporcional al área del recipiente que está lleno en contacto con el líquido. Si vertemos líquido en el recipiente a razón de $2\text{ cm}^3/\text{min}$, la altura del líquido disminuye a razón de $0,3\text{ cm}/\text{min}$, cuando esa altura es de 10cm. Si nuestro propósito es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿con qué rapidez debemos verter el líquido en el recipiente? (Problema de aplicación que conduce al cálculo de derivadas como razón de cambio).
2. Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV=800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V en pulgadas cúbicas:
 - a) Determine la razón promedio de cambio de P cuando V se incrementa de 200 pulg^3 a 250 pulg^3 .
 - b) Expresé V como función de P y demuestre que la razón instantánea de cambio de V con respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de esta última. (Aplicación en la Física).
3. Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x del lado, calcule $\frac{dV}{dx}$ cuando $x=3\text{ mm}$. Explique su significado.
 - a) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo con respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geoméricamente por qué ese resultado es cierto.
 - b) Considere que el volumen de uno de los cristales es de $x=5\text{ mm}$ y determine cuál es el área total máxima que cubre su superficie. (Ejercicio de aplicación en la Química que se integra además con el contenido referente a problemas de optimización que recibieron en el tema de la asignatura).

Clase práctica del tipo IV:

Puede orientarse con antelación una tarea extraclase en la que confeccionen problemas similares a los siguientes relacionados con diferentes disciplinas básicas o con su perfil profesional y debatir el texto y la solución en una clase de este tipo).

1. Las referencias siguientes contienen explicaciones de los métodos que aplicaron Fermat y Barrow para hallar rectas tangentes, compárelos con el que usted utiliza a través de las derivadas y señale las semejanzas.
 - Carl Boyer y Uta Merzbach. A History of Mathematics. Nueva York: John Wiley, 1989, pp.389-432.
 - C. H. Edwards, the Historical Development of the Calculus. Nueva York, Springer-Verlag, 1979, pp.391-395. (Ejercicio donde utilizan las nuevas tecnologías de la información que favorece el análisis histórico de la ciencia Matemática en el que tienen que aplicar el concepto de derivada y arribar a conclusiones).
2. Sea una viga de longitud (l) con apoyos en los extremos A y B sobre la que actúa una carga distribuida (q) en toda su longitud y sea $M(z) = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}$ la ley de variación (función) del momento $[M(z)]$ para diferentes puntos de la longitud de la viga. Calcule el valor de la fuerza cortante $[V(z)]$ o fuerzas perpendiculares al eje de la viga. (Ejercicio de aplicación del cálculo de las derivadas en la asignatura Modelación Mecánica de las Estructuras para la Ingeniería Civil).
3. El peso del cerebro (B) como función del peso corporal (W) en los peces se ha modelado con la función de potencia $B = 0,12L^{2,53}$. Si a lo largo de 10 millones de longitud promedio de cierta especie de pez, evolucionó de 15 cm a 20 cm con rapidez constante, ¿con qué rapidez estaba creciendo el cerebro de esta especie cuando la longitud promedio era de 18 cm. (Ejercicio de aplicación donde deben transformar la tasa requerida en términos de derivadas y deducir ecuaciones previo al cálculo de las derivadas).

En general las derivadas están presentes en diferentes campos de la vida, representan razones de cambios de incrementos de funciones respecto al incremento de su variable independiente, cuando esta tiende a cero. Por ejemplo: la velocidad de una partícula es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo, la potencia es la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo, la velocidad de reacción es la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo, etc. El cálculo de estas razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería, e incluso, en las ciencias sociales. Desde el punto de vista geométrico se pueden interpretar como pendientes de rectas tangentes a curvas y siempre que se resuelvan problemas de este tipo, no resolvemos sólo un problema de geometría, sino también resolvemos implícitamente una gran variedad de problemas de la ciencia y la ingeniería en que intervienen razones de cambio.

La siguiente tabla relaciona algunas de las aplicaciones del cálculo de las derivadas en diferentes ciencias:

CIENCIA	APLICACIÓN
Física	<ul style="list-style-type: none"> • Velocidad. • Aceleración. • Densidad. • Corriente. • Potencia. • Gradiente de temperatura.
Química	<ul style="list-style-type: none"> • Velocidad de reacción. • Compresibilidad.
Biología	<ul style="list-style-type: none"> • Tasa de crecimiento. • Velocidad de la sangre.
Economía	<ul style="list-style-type: none"> • Costo marginal. • Utilidad marginal.
Geología	<ul style="list-style-type: none"> • Razón de flujo del calor.
Psicología	<ul style="list-style-type: none"> • Razón de mejora del rendimiento.
Sociología	<ul style="list-style-type: none"> • Velocidad de esparcimiento de un rumor.

Esta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas se apoya en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diversas en cada ciencia. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo expresó de manera sucinta: "Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los unen" (Stewart, 2006:205).

3.1. El Trabajo independiente en las clases de ejercitación.

En la medida que el proceso docente adquiera cada vez un carácter productivo, se nutre de todo tipo de procedimiento, que provoca el trabajo independiente de los educandos.

Es evidente que, en nuestras condiciones de desarrollo, una de las más urgentes e importantes necesidades pedagógicas constituye la búsqueda de estrategias que contribuyan al incremento de las potencialidades independientes y creadoras de los estudiantes.

Diferentes autores han tratado el concepto de trabajo independiente y lo han definido en variadas aristas:

(Pidkasisti, 1986:86) plantea que:

"Trabajo independiente es el medio de inclusión de los alumnos en la actividad cognoscitiva independiente, el medio de su organización lógica y psicológica".

Como señala Pidkasisti, la esencia del trabajo independiente es necesaria encontrarla a través del análisis de los nexos que unen a los componentes de la actividad independiente, es decir, el alumno actuando en calidad de **sujeto**

de la actividad y los objetivos reales, los fenómenos, etc. en calidad de objetos de la actividad.

En esta tendencia el trabajo independiente ha sido considerado como un sistema de métodos y procedimientos que facilita introducir a los estudiantes, de forma eficaz, en la actividad cognoscitiva independiente.

Es necesario destacar, en cuanto al aspecto relacionado con la esencia del trabajo independiente, el desarrollo de la independencia cognoscitiva, que no es suficiente con la clara formulación de los problemas y objetivos del mismo, sino además es necesario establecer como cuestión esencial la presentación del trabajo independiente como un sistema de medidas didácticas dirigidas a (Rojas, 1978:26):

- La asimilación consciente del material docente.
- El perfeccionamiento de sus conocimientos y su desarrollo.
- La consolidación de sus conocimientos.
- La formación de habilidades prácticas de todos los tipos.
- La formación de la tendencia a la búsqueda independiente de nuevos conocimientos.

Esta interpretación dada por Carlos Rojas revela la esencia del trabajo independiente fundamentando que un grupo de tareas aisladas, carentes de sistema, obstruyen el desarrollo de la independencia cognoscitiva.

Se valora, muy integralmente, la acepción que brinda Carlos Álvarez respecto al trabajo independiente y se concluye que ésta sintetiza en un peldaño cualitativamente superior los elementos esenciales tratados por otros autores, constituyendo una valiosa herramienta metodológica para organizar la actividad cognoscitiva independiente, cuando expresa (Álvarez, 1992:106): “El trabajo independiente es el modo de organización del proceso docente dirigida a la formación de la independencia, como característica de la personalidad del estudiante”.

Se refiere por una parte que el trabajo independiente tiene por objetivo el logro de la independencia, que en el plano pedagógico se traduce en la libertad de elección de modos y vías para desarrollar las tareas cognoscitivas, es decir, la capacidad de actuar por sí mismo.

Es parte consustancial del trabajo independiente su carácter de sistema, de método, en tanto se trata de “modo”, de “vía”, de la forma de organizar la actividad del estudiante. El trabajo independiente es el aspecto metodológico que concreta la independencia cognoscitiva del estudiante en el proceso docente.

Otro aspecto que debemos valorar al analizar la esencia del trabajo independiente consiste en que la gestión independiente del estudiante es factible realizarla en los diferentes niveles de asimilación del contenido, de manera que podemos hablar de trabajo independiente tanto cuando el alumno realiza una actividad cognoscitiva reproductiva como productiva, como cuando realiza una acción de carácter creativo, dentro de la dialéctica del proceso de enseñanza-aprendizaje.

A partir del análisis de estos planteamientos inferimos que el trabajo independiente puede considerarse como un sistema de tareas didácticas que promuevan el aprendizaje compartido, que organicen y garanticen el desarrollo

ascendente e ininterrumpido de la independencia cognoscitiva de los estudiantes, condicionado por una adecuada interacción profesor-alumno. Existen en la literatura pedagógica revisada algunos aspectos relacionados con el trabajo independiente que es importante analizar y superar, los cuales mencionaremos a continuación:

- No hay que identificar la actividad cognoscitiva con el trabajo independiente en tanto que, si bien en todo trabajo independiente hay un grado de independencia cognoscitiva, en toda actividad cognoscitiva no tiene por que haber independencia.
- No hay que identificar el trabajo independiente con las formas o tipos de organización del proceso docente. Esta identificación trae consigo errores teóricos y prácticos que lesionan la calidad de la docencia. No es correcto decir por ejemplo que la clase práctica, como tipo de organización del proceso docente, es una forma o tipo de trabajo independiente, pues la misma atiende a la estructura organizativa del proceso y el trabajo independiente al modo de desarrollar la independencia cognoscitiva.

En resumen el estudiante en su actividad de aprendizaje desarrolla sus métodos y procedimientos, de manera inicial similar al del profesor y de ese modo va dominando las habilidades y asimilando los conocimientos, y manifiesta su independencia al ejecutar los métodos, que por sí solo, entiende que son necesarios utilizar para la solución de nuevos problemas más complejos, llegando incluso a niveles de asimilación de carácter creativo.

3.1.1. Clasificación del trabajo independiente:

Entre las diversas definiciones que aparecen en la literatura pedagógica revisada sobre el trabajo independiente existe correspondencia con las clasificaciones del mismo.

Con la finalidad de que resulte útil al seleccionar y organizar actividades de este tipo en las clases de Matemática, proponemos la siguiente clasificación:

1. Basada en las fuentes del conocimiento:

- Trabajo con el libro de texto.
- Trabajo con obras de consulta.
- Solución de ejercicios.
- Trabajo con gráficos.

2. Considerando el aspecto externo e interno del trabajo independiente:

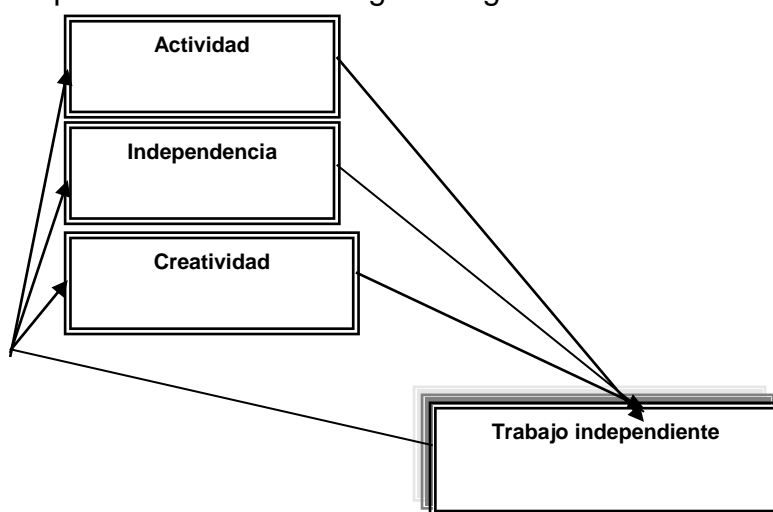
- Trabajos independientes sobre la base de conocimientos ya adquiridos.
- Trabajos independientes empleados sobre la base de la adquisición de los nuevos conocimientos.
- Trabajos independientes dirigidos al repaso y comprobación de conocimientos.

O lo que de forma similar puede ser:

- Trabajo independiente por modelo.
- Trabajo independiente reproductivo.
- Trabajo independiente productivo.
- Trabajo independiente creativo.

La correlación sistémica entre la actividad, la independencia y la creatividad de los alumnos en el proceso del trabajo independiente, mediante el

sistema de tareas que lo conforman, y el desarrollo de estas cualidades en los alumnos, se puede resumir en el siguiente gráfico:



Relación entre actividad, independencia y creatividad durante el desarrollo de actividades de Trabajo Independiente

Es oportuno resaltar que a través de esta estrategia didáctica se promueve un aprendizaje cooperativo entre iguales lo cual favorece el desarrollo de la independencia cognoscitiva de los alumnos.

CONCLUSIONES:

- La habilidad **calcular** ocupa un lugar importante en el programa de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral I para el ingeniero Civil, por la incidencia que ella tiene en la esfera profesional del futuro egresado.
- Se determinaron las invariantes funcionales, se establecieron indicadores y se creó una escala que permitieron evaluar la habilidad calcular.
- Los diferentes tipos de clase de ejercitación propuestos se convierten en un marco propicio para el desarrollo de la habilidad calcular.
- La concepción y aplicación de un trabajo independiente adecuado permite contribuir al desarrollo de dicha habilidad.

BIBLIOGRAFÍA

1. Agudín, Y. (1988): "Los contemporáneos y las habilidades". DIDAC. Universidad Iberoamericana, México.
2. Álvarez, C. (1983). "Sobre el sistema de habilidades en una especialidad universitaria". En *Revista Cubana de Física*. Vol. III. No. 1, julio 1984, p 28-35.
3. Álvarez, C. (1989): "Fundamentos teóricos de la dirección del Proceso Docente en la Educación Superior Cubana". Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
4. Álvarez, C. (1992): "La Escuela en la vida". Colección Educación y Desarrollo. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
5. Ballester, S. y otros. (1992): "Metodología de la enseñanza de la Matemática". Editorial Pueblo y Educación, La Habana. Cuba.

6. Baxter, E. (1988): "Estudio individual o estudio colectivo". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
7. Bermúdez, R. y Rodríguez, M. (1996): "Teoría y metodología del aprendizaje". Editorial Pueblo y Educación, La Habana.
8. Blanco, R. (1994): La orientación de las acciones del estudiante en el proceso de asimilación. *Revista cubana de Educación Superior*, No 6, Universidad de la Habana, marzo 1994, p. 24-25.
9. Brito, H. (1988): "Hábitos, Habilidades y Capacidades". En *Revista Varona*. No 5, 1988, p.35-39.
10. Campistrous, L. y Rizo, C. (1989): "Orientaciones Metodológicas de Matemática". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
11. Colectivo de Autores. (1994): "La integración sistemática de los contenidos matemáticos". Material de consulta. ISP "Manuel Ascunce Domenech". Ciego de Ávila. Cuba.
12. Colectivo de Autores. (1995): "Temas de Psicología Pedagógica para maestros". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
13. Collazo, B. y Puentes, M. (1992): "La orientación en la actividad pedagógica". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.
14. Colectivo de Autores. (1984): "Desarrollo de habilidades intelectuales para el trabajo independiente de los alumnos, vías para lograrlo". En *Seminario Nacional a Dirigentes, Metodólogos e Inspectores de las direcciones Provinciales de Educación. II Parte*, p.98-112.
15. "Enciclopedia Universal Ilustrada". (1925). Tomo XXVII. Editores Hijos de Espasa. Barcelona. España.
16. Hernández, H. (2008): "La huella de la matemática en el pensamiento". MES, pp.2 (Material en soporte magnético).
17. Jungk, W. (1979): "Conferencias sobre Metodología de Enseñanza de la Matemática". Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
18. Labarrere, G. y Valdivia, G. (1991): "Pedagogía". Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
19. Martínez, O. (1984): "El desarrollo de habilidades para el trabajo independiente de los estudiantes, vías para lograrlo". En *Seminario Nacional a Dirigentes, Metodólogos e Inspectores de las direcciones Provinciales de Educación. II Parte*, p. 88-102, La Habana. Cuba.
20. Meda, M. (1985): "Tronco común en Matemática para estudiantes de Ingeniería". México.
21. Pidkasi, P.I. (1986): "La actividad cognoscitiva independiente de los alumnos en la enseñanza". Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba.
22. Rojas, C. (1978): "El trabajo independiente de los alumnos, su esencia y clasificación". *Revista Varona*, No1, (1978), p. 64-73.
23. Stewart, J. (2006): "Cálculo con trascendentes Tempranas". Editorial Félix Varela. La Habana. Cuba.
24. Talízina, Nina F. (1987): "La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares". Editorial Mir. Moscú.